

Графичка обрада резултата мерења

Резултате сложенијих и више пута поновљених мерења треба приказати у табелама. Из табела понекад није лако утврдити односе између приказаних физичких величина, па се често користи графички приказ резултата мерења. Њиме се првенствено:

- утврђују непознате релације између мерених величина,
- проверавају теорије и
- одређују бројне вредности неких физичких величина.

Ако је позната зависност између величина приказаних на графику, са графика се може видети успешност мерења. Лако се могу уочити експерименталне тачке које одступају од графика, па је могуће поновити мерења која њима одговарају. На графику се могу уочити минимума, максимуми, превојне тачке, и сл., из којих се некада могу одредити тражене физичке величине.

График се често користи за индиректно одређивање неке физичке величине, ако је одређена зависност између других мерених величина. У ове сврхе се график најчешће користи у обради резултата школских експеримената.

Правила за цртање графика

За цртање графика користе се различити папири. Говорићемо само о милиметарским папирима формата A_4 , који се користе у обради резултата мерења у основним и средњим школама. Димензије оваквих графика могу бити максимално $250 \text{ mm} \times 170 \text{ mm}$.

Координатне осе треба цртати по ивицама милиметарског папира. По правилу, на апсцису се наноси независно променљива, а на ординату зависно променљива величина. Размера се бира тако да је испуњен што већи простор расположивог папира. При томе је често боље да пресеци координатних оса не буду у координатном почетку. Међутим, треба бити веома пажљив, јер то некада може довести до грубе грешке. На пример, ако је са графика линеарне зависности потребно одредити пресек са ординатом, апсциса мора да почиње од нуле. Папир треба окренути тако да график што више испуњава расположиви папир, односно, потребно је правилно одабрати коју величину треба нанети на дужу, а коју на краћу осу.

Да би наношење и читавање вредности са графика било лако, 1 mm на милиметарском папиру може да одговара

... $0.05 ; 0.1 ; 0.2 ; 0.4 ; 0.5 ; 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 10$ итд.

јединица величине која се приказује. Другим речима, јединица величине која се приказује (или њен умножак са $10^{\pm n}$, где је n цео број) може да буде приказана са $1, 2, 2.5, 5, 10, 20, 25, 50, 100$ итд. милиметара на милиметарском папиру. Размеру $1:4$ треба избегавати. Све остале размере нису допуштене. На пример, јединица физичке величине не сме бити приказана на милиметарском папиру са 3 mm или 3 cm (најчешћа грешка), $6 \text{ mm}, 7 \text{ cm}, 12 \text{ mm}, 15 \text{ cm}$ и сл.

На осе се наносе само еквидистантне ознаке бројних вредности физичких величина. На осе не треба писати бројне вредности које одговарају експерименталним тачкама, као што не треба повлачити било какве линије од оса до нанетих тачака.

Експерименталне тачке се означавају кружићима, крстићима, квадратићима и сл. Ако је на исти папир нането више низова података, сваки низ се означава посебним ознакама. Ове тачке на графицима, у општем случају, морају бити унете са одговарајућим апсолутним

грешкама приказаних величина. Не уносе се апсолутне грешке само ако су мање од вредности најмањег одговарајућег подеока графика.

Ако су физичка величина и њена грешка приказане у истој табели, морају бити изражене са истим експонентом. Ако је бројна вредност физичке величине која се уноси у табелу, или наноси на график, мања од 0.01, или већа од 100, потребно ју је изразити у експоненцијалном облику. При томе се често чине грешке у месту писања експонента, што доводи до велике грешке у приказу резултата, веће од 10.000 пута. У табелама 1б и 1ц приказана су два исправна записа резултата мерења датих у табели 1а. Неправилно је у заглављу табеле 1б написати $t \cdot 10^{-2}[s]$.

Табела 1.

$t [s]$
0.012
0.015
0.018
0.023

а)

$t \cdot 10^{-2}[s]$
1.2
1.5
1.8
2.3

б)

$t [10^{-2}s]$
1.2
1.5
1.8
2.3

ц)

Линеаризација графика

Најлакше је анализирати зависност између физичких величина, или њихових алгебарских комбинација, ако између њих постоји линеарна веза.

Велики број школских експеримената може бити обрађен анализом линеарних зависности, па ће њима бити посвећена посебна пажња.

Линеарна функција има облик:

$$y = ax + b,$$

где су a и b константе, параметри функције. График линеарне функције је права линија која има нагиб a и одсечак на y -оси b . Одсечак графика на x -оси (апсолутна вредност координате пресечне тачке са x -осом) износи $-b/a$.

График се кроз експерименталне тачке повлачи тако да, по оцени експериментатора, тачке у целини минимално одступају од њега. Мерења која одговарају експерименталним тачкама, које у оквиру својих грешака не додирују график, треба поновити. Оваква одступања су често последица грубих грешака (превида) у мерењу, или лоше процене грешке наведене тачке.

Тражене физичке величине се најчешће одређују из једног од параметара посматране линеарне зависности: коефицијента правца, одсечка на x или y -оси.

Коефицијент правца линеарне зависности a одређује се са графика из координата двеју његових тачака. Прва тачка $A(x_A, y_A)$ узима се између прве и друге експерименталне тачке, а друга $B(x_B, y_B)$ између претпоследње и последње експерименталне тачке. Овај коефицијент износи:

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A},$$

а његова релативна грешка:

$$\delta_y = \frac{\Delta y_B + \Delta y_A}{y_B - y_A} + \frac{\Delta x_B + \Delta x_A}{x_B - x_A},$$

где су $\Delta x_A, \Delta x_B, \Delta y_A$ и Δy_B апсолутне грешке одређивања координата x_A, x_B, y_A и y_B са графика. Свака од ових грешака је једнака већој од одговарајућих апсолутних грешака суседних тачака. Ни једна од ових грешака не може бити мања од тачности читавања координата са графика, односно од вредности најмањег подеока (милиметра) на милиметарском папиру. На пример, ако је апсолутна грешка величине нанете на апсцису, за обе суседне тачке мала (мања од вредности најмањег подеока), па није нанета на график, тада је апсолутна грешка читавања одговарајуће координате једнака вредности најмањег подеока на апсциси.

Одсечак на у-оси b се лако читава са графика. За његову апсолутну грешку се најчешће узимају највећа од апсолутних грешака величина нанетих на ординату, или апсолутна грешка по ординати, експерименталне тачке најближе у-оси. Наравно, ова грешка не може бити мања од вредности најмањег подеока на у-оси.

Одсечак на х-оси ($-b/a$) лако се одређује из пресечне тачке графика са х-осом. Погрешно га је одређивати индиректно, тако што се одреде прво a и b , јер је грешка његовог одређивања тада много већа, пошто у себи садржи грешке одређивања пет координата. За апсолутну грешку одређивања овог одсечка најчешће се узимају највећа од апсолутних грешака величина нанетих на апсцису, или апсолутна грешка по апсциси, експерименталне тачке најближе пресечној тачки графика са х-осом. Наравно, ова грешка не може бити мања од вредности најмањег подеока на х-оси.

Ако, и поред теоријског предвиђања, график не пролази кроз координатни почетак, постоји нека, најчешће систематска, грешка у мерењу. Некада се овакви експерименти морају поновити, а некада је довољно извршити корекцију на откривену систематску грешку. Понекад се може испоставити да откривена систематска грешка не утиче на тражену физичку величину. У том случају експеримент не треба понављати, него само објаснити узрок постојања систематске грешке.

4. Графици нелинеарних функција

Многе физичке величине могу бити одређене анализом нелинеарних функција. Потреба за анализом оваквих експерименталних зависности постоји и у неким експериментима који се могу реализовати у школским условима. Веома различите функционалне зависности могу бити при томе анализирани. У многим случајевима није потребно ни познавати облик функције која повезује посматране физичке величине. Због тога неће бити вршена детаљнија анализа оваквих графика. Начин одређивања физичких величина са њих и методе процене грешака оваквих мерења се разликују од експеримента до експеримента.

Познавање теоријске подлоге експеримента упућује на начин одређивања тражене физичке величине из неких параметара графика. Процена грешке мерења мора да се заснива на објективној процени експериментатора са којом је грешком одредио потребне параметре графика. Навешћемо два примера.

- 1) Мерењем површине ограничене графиком термодинамичког циклуса у p - V дијаграму, може се одредити рад извршен у току циклуса. Начин процене грешке оваквог мерења може се видети у задатку за други разред на републичком такмичењу 1996. године, односно у Збирци [1].
- 2) Анализом волт-ампер карактеристика триоде могу се одредити неке физичке величине везане за струјна кола у којима се триоде налазе. Један од примера анализе оваквих графика дат је у задатку за други разред на савезном такмичењу 1996. године, односно у Збирци [1].

5. Пример - Обрада резултата мерења модула еластичности челичне жице

Мерење је извршено уређајем који производи Лабораторија за развој и израду прототипова учила Физичког факултета у Београду.

Лако је показати да, по Хуковом закону, важи:

$$l = \frac{4gL}{Ed^2\pi}m = am + b,$$

односно, да је промена дужине затегнуте жице l линеарна функција масе тегова m , који је истежу силом своје тежине. График ове функције пролази кроз координатни почетак ($b = 0$). Модуло еластичности је одређен мерењем дужине жице L , њеног пречника d и коефицијента правца у наведеној зависности a .

Дужина жице је мерена метарском траком, чија је минимална апсолутна грешка мерења (тачност) 1 mm. Процењено је да је грешка мерења дужине 2 mm. Измерена је дужина жице:

$$L = (951 \pm 2) \text{ mm} = (9.51 \pm 0.02) \cdot 10^2 \text{ mm}.$$

Пречник жице је мерен на 5 равномерно распоређених места по дужини жице, микрометарским завртњем тачности 0.01 mm. Резултати мерења су приказани у табели 2.

Tabela 2.

$d_1[\text{mm}]$	$d_2[\text{mm}]$	$d_3[\text{mm}]$	$d_4[\text{mm}]$	$d_5[\text{mm}]$	$d[\text{mm}]$	$\Delta d[\text{mm}]$
0.28	0.29	0.29	0.28	0.29	0.29	0.01

Зависност промене дужине жице од силе истезања праћена је оптерећивањем жице теговима различите масе. Пошто је занемарива грешка масе тегова, занемарива је и грешка њихове тежине. Промена дужине жице је мерена компаратором тачности 0.001 mm. Компаратор је подешен на нулу ($p_0 = 0$) када жица није додатно оптерећена (само затегнута одређеном константном силом). Да би одредили положај нуле, жица је неколико пута оптерећивана различитим теговима и поново враћана у почетно стање. Процењено је да је апсолутна грешка одређивања овог положаја $\Delta p_0 = 0.01 \text{ mm}$. Промена дужине жице одређивана је из разлике показивања компаратора при затегнутој жици (p) и незатегнутој жици (p_0), односно:

$$l = p - p_0,$$

па је њена апсолутна грешка [1-4]:

$$\Delta l = \Delta p + \Delta p_0.$$

Резултати мерења су приказани у табели 3. У табели 4 су дати примери израчунавања појединих величина у табели 3, према правилима за израчунавање индиректно мерених величина, процене њихових грешака и начина изражавања мерених величина [1,2]. Треба приметити, између осталог:

- Да се апсолутне грешке заокружују на једну цифру различиту од нуле, а бројне вредности физичких величина на цифру која има исти ред величине као апсолутна грешка.

- Да се бројне вредности физичких величина заокружују по математичким правилима за заокруживање бројева, а апсолутне грешке увек на више, осим, евентуално ако је следећа цифра нула.

- Да се правилно заокружене бројне вредности и грешке користе када се оне експлицитно изражавају, самостално, или у табели. Међутим, ако се бројна вредност или грешка једне величине користи за израчунавање неке друге величине, или грешке (као међувредност), тада се користи незаокружена вредност, али само са једном цифром више него код заокружене вредности.

Табела 3.

Бр.	$m[\text{kg}]$	$p_i[\text{mm}]$	$p[\text{mm}]$	$\Delta p[\text{mm}]$	$l[\text{mm}]$	$\Delta l[\text{mm}]$
1	0.42	0.241	0.26	0.02	0.26	0.03
		0.257				
		0.268				
2	0.72	0.490	0.49	0.01	0.49	0.02
		0.479				
		0.500				
3	1.00	0.672	0.67	0.02	0.67	0.03
		0.660				
		0.683				
4	1.34	0.887	0.89	0.01	0.89	0.02
		0.880				
		0.893				
5	1.67	1.110	1.10	0.02	1.10	0.03
		1.100				
		1.085				
6	2.00	1.330	1.330	0.004	1.33	0.02
		1.326				
		1.334				

Табела 4.

Бр.	$p[\text{mm}]$	$\Delta p[\text{mm}]$	$\Delta l = \Delta p + \Delta p_0[\text{mm}]$
1	$\frac{0.241 + 0.257 + 0.268}{3} \approx$ $\approx 0.255 \approx 0.26$	$0.255 - 0.241 =$ $= 0.014 \approx 0.02$	$0.014 + 0.01 =$ $= 0.024 \approx 0.03$
2	$\frac{0.49 + 0.479 + 0.500}{3} \approx$ $\approx 0.490 \approx 0.49$	$0.49 - 0.479 =$ $= 0.011 \approx 0.01$	$0.011 + 0.01 =$ $= 0.021 \approx 0.02$
6	$\frac{1.330 + 1.326 + 1.334}{3} \approx$ $\approx 1.330 \approx 1.33$	$1.334 - 1.33 =$ $= 0.004 \approx 0.004$	$0.004 + 0.01 =$ $= 0.014 \approx 0.02$

Према подацима из табеле 3 нацртан је график. На график су нанете апсолутне грешке мерења промене дужине, док су, како је раније речено, грешке силе која затеже жицу занемариве. Примећује се да се у оквиру граница експерименталних грешака може повићи правац који пролази кроз координатни почетак, што је и очекивано, обзиром да се жица не може истегнути без додатног оптерећења. На графику су одабране две тачке за одређивање коефицијента правца:

тачка А	$m_A = (0.50 \pm 0.01) \text{ kg}$	$l_A = (0.33 \pm 0.03) \text{ mm}$
тачка В	$m_B = (1.95 \pm 0.01) \text{ kg}$	$l_B = (1.29 \pm 0.03) \text{ mm}$

Коефицијент правца посматране линеарне зависности износи:

$$a = \frac{l_B - l_A}{m_B - m_A} = \frac{(1.29 - 0.33) \text{ mm}}{(1.95 - 0.5) \text{ kg}} \approx 0.662 \frac{\text{mm}}{\text{kg}} \approx 0.66 \frac{\text{mm}}{\text{kg}}$$

$$\Delta a = a \left(\frac{\Delta l_B + \Delta l_A}{l_B - l_A} + \frac{\Delta m_B + \Delta m_A}{m_B - m_A} \right) = 0.662 \frac{\text{mm}}{\text{kg}} \left(\frac{0.024 + 0.023}{1.29 - 0.33} + \frac{0.01 + 0.01}{1.95 - 0.5} \right) \approx 0.042 \frac{\text{mm}}{\text{kg}} = 0.005 \frac{\text{mm}}{\text{kg}},$$

па је моду еластичности:

$$E = \frac{4gL}{d^2 \pi a} = \frac{4 \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 \cdot 9.51 \cdot 10^{-2} \text{ mm}}{(0.287 \text{ mm})^2 \cdot 3.14} \frac{1}{0.662 \text{ mm/kg}} \approx 2.18 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \approx 2.2 \cdot 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$\Delta E = E \left(\frac{\Delta L}{L} + 2 \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta a}{a} \right) = 2.18 \cdot 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \left(\frac{2}{951} + 2 \frac{0.01}{0.287} + \frac{0.042}{0.662} \right) \approx 0.3 \cdot 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$E = (2.2 \pm 0.3) \cdot 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Напомена: У описаном експерименту ученици понекад непажњом помере компаратор тако да се покреће тек ако на жицу делује одређена додатна сила. У том случају добијени график не пролази кроз координатни почетак, него пресеца апсцису у позитивном делу. Пошто коефицијент правца зависи од промене дужине за дату промену силе затезања, експеримент није потребно понављати, него само објаснити узрок ове систематске грешке.

Литература:

1. Мићо М. Митровић, Збирка задатака везаних за такмичења из физике (1990-1995) I Разред, Београд, 1999.
Мићо М. Митровић, Збирка задатака везаних за такмичења из физике (1990-1996) II Разред, Београд, 1999.
2. С.Е. Божин и др., Практикум из физике, Лабораторијске вежбе, Београд, 1996.
3. Л.Л. Голдин и др., Лабораторније занјатија по физике, Наука, Москва, 1983.